

Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 1 : Connaissances Générales

Répondre « Vrai » ou « Faux » et justifier/commenter brièvement

Barème : Réponse juste : 0.5 pt ; Justification : 1 pt ; Réponse fausse : 0 pt ;

Total max : 36 pts

Sans documents, sans calculatrices

30 minutes max

1. Une onde de Mach :

- a. est une onde de choc oblique infiniment faible.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. peut avoir n'importe quelle forme.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. n'existe qu'en 2D.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

2. Dans le cas d'un écoulement isentrope :

- a. la pression ne dépend que de la température.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. un gaz est obligatoirement parfait.

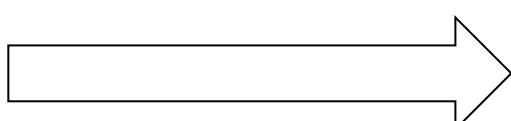
VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. il n'est pas possible d'avoir une compression.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :



3. Quand un écoulement subsonique entre dans une tuyère convergente-divergente :

- a. la vitesse et le nombre de Mach varient dans le même sens. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

Justification/Commentaire :

- c. il y a toujours des ondes de Mach dans certaines parties de la tuyère. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. seul un endroit peut devenir sonique. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- e. pression et température varient toujours dans le même sens, que l'écoulement soit isentrope ou non. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

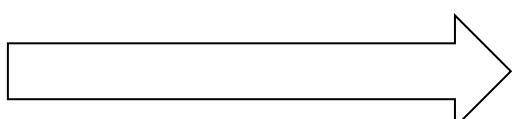
- f. le débit volumique (m^3/s) est constant le long de la tuyère. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

4. Une onde de choc droite dans un gaz parfait :

- a. se déplace toujours à une vitesse supérieure à la vitesse du son du gaz au repos qu'elle traverse. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :



- b. ne voit jamais les mêmes vitesses d'écoulement en amont et en aval, quel que soit le référentiel. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. n'a pas le même effet sur la pression statique et la pression totale. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. modifie toujours la vitesse du son de l'écoulement qui la traverse. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- e. est le seul moyen de comprimer un écoulement. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

5. Une onde de choc oblique :

- a. est toujours moins intense qu'une onde de choc droite pour un même nombre de Mach en amont. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. est toujours ancrée à un corps solide. VRAI FAUX

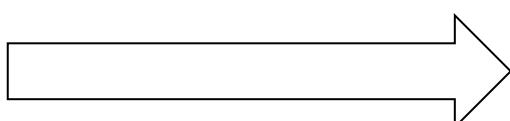
Justification/Commentaire :

- c. ne change ni la vitesse tangentielle ni le nombre de Mach tangentiel. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. peut être un choc droit par un changement approprié de référentiel. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :



6. Un écoulement de Prandtl-Meyer:

- a. peut augmenter le nombre de Mach jusqu'à une valeur infinie. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. n'est rien d'autre qu'un écoulement 2D avec une famille de caractéristiques de Riemann rectilignes. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. peut soit comprimer soit détendre l'écoulement. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 2 : Exercices

Barême :

Ex 1: 21 pts ; Ex 2 : 22 pts, Ex 3 : 21 pts

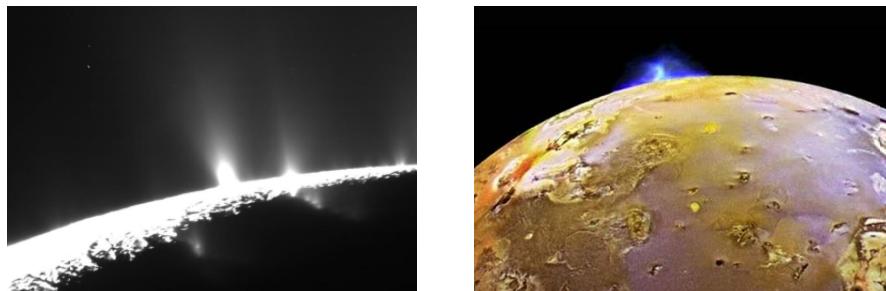
Total max : 64 pts.

Documents (formulaire, tables) distribués

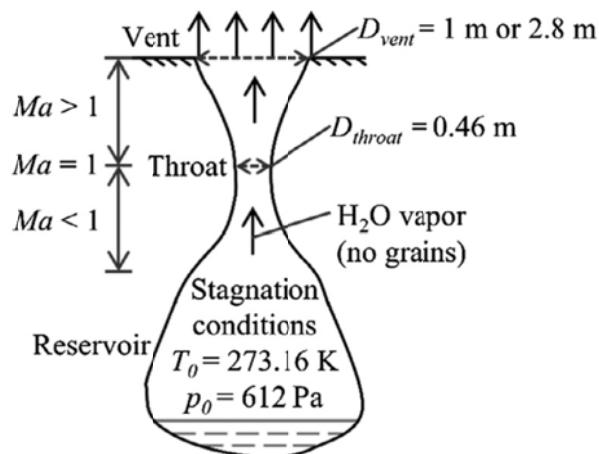
Jusqu'à 15h15 max

1. Volcan supersonique (21 points)

Des jets volcaniques ont été découverts par des sondes planétaires (Cassini et Galileo) sur les lunes Io de Jupiter et Enceladus de Saturne (photos ci-dessous). La particularité de ces jets (contrairement à ceux sur des planètes comme la terre) est qu'ils se produisent sur des lunes de faible diamètre, ce qui implique que la gravité varie fortement entre le sol et le sommet du jet.



Un modèle de ces jets sur Enceladus est donné sur le schéma ci-dessous (Yeoh *et al.* 2015 “On understanding the physics of the Enceladus south polar plume via numerical simulation”).



Ce modèle est basé sur la vaporisation d'eau dans un "réservoir" dans des conditions thermodynamiques correspondant au point triple de l'eau (273.16 K et 612 Pa). La vapeur d'eau est alors détendue le long d'une conduite pouvant être assimilée à une tuyère convergente-divergente avec un col ("throat"). La sortie ("vent") se fait dans un milieu à pression nulle (sans atmosphère). Les calculs sont réalisés pour deux diamètres de sortie (1.0 m et 2.8 m). Les valeurs indiquées dans leur table (ci-dessous) sont celles à la sortie de la tuyère du volcan.

Properties	Mach 3	Mach 5
Vent-to-throat area ratio	4.8	36.6
D_{throat} (m)	0.46	0.46
D_{vent} (m)	1	2.8
Density (kg/m ³)	3.1×10^{-4}	3.5×10^{-5}
Velocity (m/s)	780	902
Temperature (K)	110	53
Pressure (Pa)	15.8	0.9
Mass flow rate, \dot{m}_{vent} (kg/s)	0.2	0.2

- En comparant certaines valeurs dans cette table à celles dans les tables isentropes, en déduire que les auteurs ont utilisé un rapport de chaleurs spécifiques γ entre 1.3 et 1.4.
- Justifier que la molécule d'eau (en forme de V) a trois degrés de liberté de rotation, et montrer ainsi que la valeur du rapport de chaleurs spécifiques pour l'eau est égal à $\gamma = 4/3$ en supposant que la molécule d'eau, dans cette fenêtre de température, n'est soumise qu'à de la translation et de la rotation.
- Confirmer cette valeur en calculant avec les formules toutes les valeurs de sortie (rapport d'aire, pression, température, masse volumique, et vitesse) et en les comparant à celles listées dans la table pour Mach 3.
- Est-ce qu'il est normal que le débit indiqué dans la table soit le même pour les deux nombres de Mach de sortie ? Justifier et calculer sa valeur.

Remarque : en réalité, l'écoulement est beaucoup plus complexe à cause de la masse volumique très faible qui fait que le gaz n'est plus un milieu continu mais à l'état moléculaire ; à cela s'ajoutent les phénomènes de solidification en cristaux de glace.

- e. Comme la pression (et température) est nulle dans le milieu ambiant, une onde de détente se forme en sortie. Avec un nombre de Mach infini en sortie de détente (justifier) et en utilisant le résultat que la fonction de Prandtl-Meyer pour Mach infini tend vers la valeur (justifier):

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \nu(M) = 90^\circ \times \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

évaluer l'angle du sortie du jet pour Mach 5, en supposant une géométrie bi-dimensionnelle (et non axi-symétrique) (attention : il faut utiliser les formules avec la valeur de $\gamma = 4/3$).

- f. Evaluer d'une manière simple la vitesse du jet en sortie de détente (où le nombre de Mach est infini) et montrer qu'elle ne dépend que de la température du réservoir.
- g. En fait, à cause de la gravité, la conservation d'enthalpie devrait s'écrire comme suit :

$$c_p T + \frac{1}{2} u^2 - g \frac{r_0^2}{r} = \text{const}$$

où g est l'accélération due à la gravité au niveau du sol de la lune, r la coordonnée radiale (centrée sur la lune) du jet, et r_0 le rayon de la lune. La constante peut s'évaluer à partir des valeurs (indice 0) en surface de lune ($r = r_0$) en négligeant la longueur de la tuyère :

$$c_p T + \frac{1}{2} u^2 - g \frac{r_0^2}{r} = c_p T_0 + \frac{1}{2} u_0^2 - g \cdot r_0$$

- (i) Pour une particule solide (de température constante, comme une fusée), montrer que la vitesse de libération (vitesse initiale au niveau du sol u_0 nécessaire pour se libérer de la gravité lunaire, c'est à dire $u \rightarrow 0$ pour $r \rightarrow \infty$) est donnée par la formule classique :

$$u_0 = \sqrt{2gr_0}$$

- (ii) Pour un gaz, ayant une vitesse nulle dans le réservoir ($u_0 = 0$), montrer qu'une température de réservoir T_0 permet au gaz de se libérer de la gravité lunaire (là où $T = 0$) si :

$$T_0 = \frac{g}{c_p} r_0$$

Expliquer physiquement comment le gaz peut s'échapper de la gravité lunaire alors qu'il n'a pas de vitesse initiale (penser à l'origine moléculaire de la température d'un gaz).

2. Condensation supersonique (22 points)

Un phénomène très commun associé à des écoulements compressibles est la formation de nuages liés à la condensation de l'eau (humidité) en suspension dans l'air. Ce spectacle se produit généralement sur des véhicules aériens tels des avions ou des fusées. Ce phénomène peut se produire sur des ailes d'avions de ligne (dans des conditions très humides), mais les images les plus impressionnantes sont celles montrant des cônes de condensation (comme sur la photo ci-contre), dont la forme est faussement associée par le grand public à la présence d'une onde de choc (conique) ou à la preuve flagrante d'un avion traversant le mur du son (!).



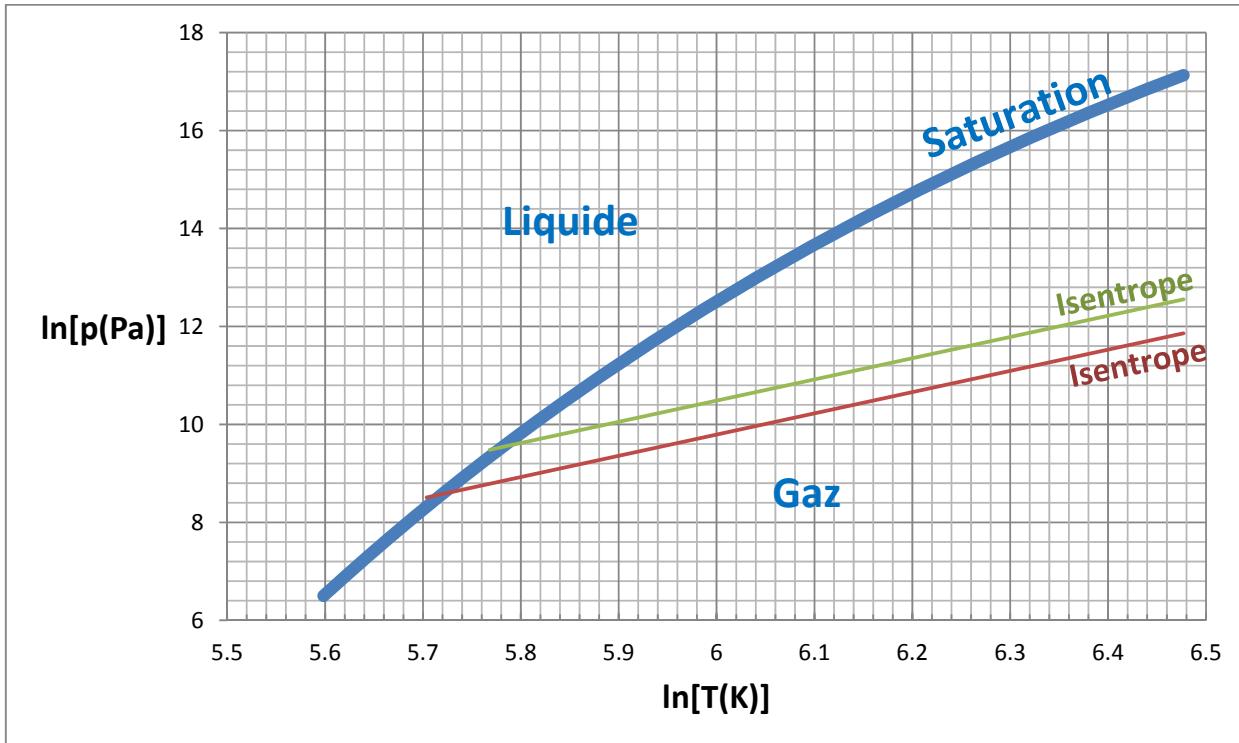
Nous allons montrer qu'une onde de choc ne peut pas créer des nuages de condensation, que ces derniers résultent d'une détente isentrope (même en subsonique), et que leur forme conique est associée à l'angle d'une onde de Mach en écoulement supersonique.

La courbe de saturation de l'eau, sur un diagramme thermodynamique $p-T$, sépare l'eau à l'état liquide de l'eau à l'état vapeur (gaz). Cette courbe est universelle et est donnée par la relation suivante (relation de Clausius-Clapeyron), liant la pression de saturation (ou de vapeur) de l'eau p_s (en Pa) à la température T en (K) :

$$\ln p_s = -\frac{L}{r \cdot T} + 24.68$$

où $L = 2'264'760 \text{ J / kg}$ est la chaleur latente (de vaporisation) et $r = 461.4 \text{ J / kg.K}$ la constante spécifique de la vapeur d'eau (prise comme un gaz parfait). Cette courbe de saturation est tracée sur le schéma ci-dessous sur une échelle logarithmique et est valable entre le point triple à 273.16 K et le point critique à 647 K .

- Vérifier que le diagramme ET la relation de Clausius-Clapeyron donnent bien une température de 100°C pour de l'eau qui bouillonne à pression atmosphérique standard ($101'325 \text{ Pa}$) (Attention : bien convertir en K).



- b. Montrer que, si la vapeur d'eau est considérée comme étant un gaz parfait, les courbes isentropes sur ce diagramme logarithmique sont des droites de pente :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

où γ est le rapport de chaleurs spécifiques de la vapeur d'eau (qu'on prendra égal à $\gamma = 1.3$), et que par conséquence, elles sont toutes parallèles (sur un diagramme logarithmique).

- c. Montrer que le rapport des pentes de la courbe de saturation de l'eau et d'une isentrope est donnée par :

$$\frac{L}{c_p \cdot T}$$

où $c_p = \frac{\gamma \cdot r}{\gamma - 1}$ est la chaleur spécifique de la vapeur d'eau, et montrer ainsi que les isentropes croisent obligatoirement la courbe de saturation de l'eau tant que la température est comprise entre 273.16 K et 647 K .

- d. Montrer ainsi que si un écoulement est progressivement détendu (baisse de pression) d'une manière isentrope, la vapeur d'eau se condensera forcément et formera un nuage de gouttelettes d'eau (en fait, pour des pressions et températures plus basses, il y aura formation de cristaux de glace : le diagramme ci-dessus n'inclut que la courbe de saturation gaz-liquide et non la courbe de solidification gaz-solide).

- e. Pour un écoulement isentrope de vapeur d'eau dans une tuyère convergente-divergente (avec blocage sonique), avec une pression de réservoir de 541'350 Pa et une température de réservoir de 700 K, vérifier que le rapport entre l'aire de sortie de la tuyère et l'aire du col doit être égale à 3.6811 pour qu'il y ait condensation en sortie de tuyère.
- f. Montrer que pour un écoulement 2D, homentrope (entropie uniforme), sur une surface convexe (comme l'extrados d'une aile d'avion), et uniforme en amont, le front de condensation (s'il y a condensation) est obligatoirement rectiligne et correspond à une caractéristique de Riemann de pente égale à celle de l'onde de Mach locale.
- g. Montrer que la position verticale des isentropes sur le diagramme ci-dessus dépend de la valeur du terme :

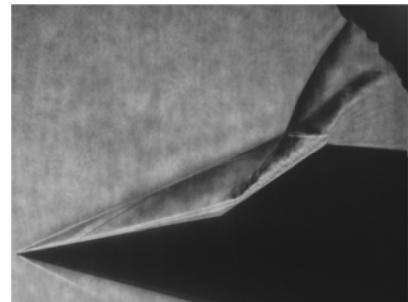
$$\frac{p_0}{(T_0)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

où p_0 est la pression totale et T_0 la température totale de l'écoulement. Montrer ainsi que pour une même température totale, les isentropes avec une pression totale plus élevée sont positionnées plus haut sur le diagramme et qu'elles ont une valeur d'entropie plus faible.

- h. Un écoulement de vapeur d'eau à une pression totale $p_{0,1}$ traverse une onde de choc pour atteindre de nouvelles conditions de pression totale $p_{0,2}$. En utilisant le résultat de la question précédente, choisir deux états arbitraires d'entropie sur le diagramme ci-dessus, un correspondant à l'état entropique de l'écoulement avant le choc et l'autre à l'état entropique de l'écoulement après le choc. Indiquer arbitrairement un état thermodynamique en amont du choc (point sur le diagramme), et montrer la région sur ce diagramme où se trouverait l'état thermodynamique en aval du choc, en respectant les contraintes thermodynamiques imposées par le choc. Montrer ainsi qu'en traversant un choc, de la vapeur d'eau ne peut rester que sous forme de vapeur et ne peut jamais se condenser et former un nuage.
- i. Question Bonus : on aurait pu répondre à la question précédente en traçant sur le diagramme le processus de changement d'état thermodynamique à travers une onde de choc (relation de Rankine- Hugoniot). Re-travailler la relation obtenue en classe pour pouvoir l'utiliser sur un diagramme $p-T$ (il faudrait ensuite la tracer pour se rendre compte qu'elle ne peut jamais intersecter la courbe de saturation).

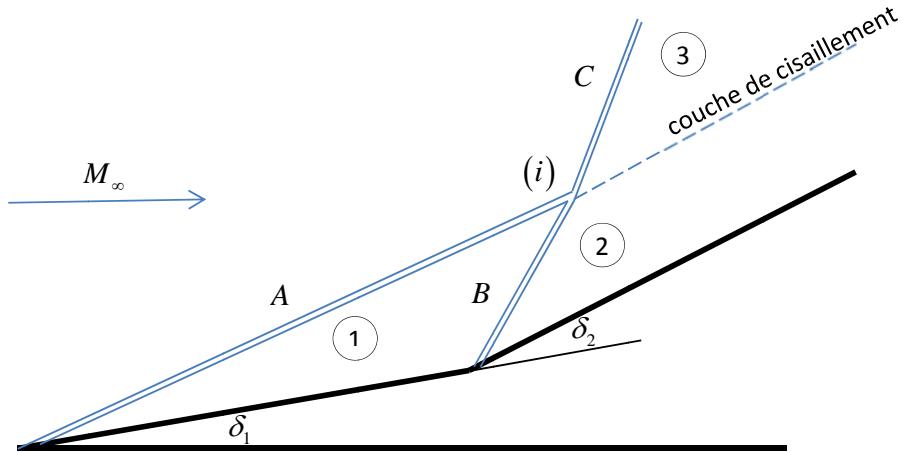
3. Double rampe de compression (21 pts)

Un étudiant EPFL en SGM a pris cette image dans une soufflerie supersonique (Caltech, 2016). Il s'agit d'un écoulement sur une double rampe de compression, qui montre l'interaction complexe entre ondes de chocs et ondes de détente. Ce problème est important en vol hypersonique car l'interaction d'ondes crée d'énormes gradients thermiques, qui ont mené à des accidents spectaculaires (avec le X-15 en particulier). Nous allons simplifier la phénoménologie de l'écoulement selon le schéma ci-dessous.



Deux chocs A et B générés sur la double rampe se croisent au point (i). En général, au point d'intersection (i) plusieurs phénomènes peuvent se produire simultanément, comme des ondes de choc et des ondes de détentes.

- Pour un écoulement d'air ($\gamma = 1.4$), $M_\infty = 2.8$, et des angles de rampe $\delta_1 = 15^\circ$ et $\delta_2 = 17^\circ$ (approximativement), il se forme uniquement une troisième onde de choc C au point (i) ainsi qu'une couche de cisaillement.



Trouver l'angle de cette onde de choc C, les nombres de Mach M_1 , M_2 , et M_3 , ainsi que les pressions p_1 , p_2 , et p_3 (normalisées par p_∞), et confirmer ainsi que cette morphologie est approximativement correcte.

- Pour d'autres conditions proches mais différentes des précédentes (nombre de Mach et angles de rampe), outre l'onde de choc C, d'autres ondes apparaissent au point (i). En vous basant sur la question précédente et sur les exercices faits en classe, essayer d'imaginer deux autres configurations d'ondes au point (i) en plus de l'onde de choc (C) (faire deux schémas).

① Volcan supersonique

a) Le plus simple est d'utiliser la température pour un écoulement isentrope :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}$$

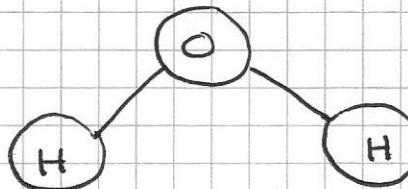
avec $T_0 = 273,16 \text{ K}$

Cette relation indique clairement que pour $1 < \gamma < 1,67$, pour un même nombre de Mach M , la température T sera une fonction décroissante de γ .

	$M = 3$	$M = 5$
$\gamma = 1,3$	116,2 K	57,5 K
Tableau	110 K	53 K
$\gamma = 1,4$	97,6 K	45,5 K

Il est donc évident que : $1,3 < \gamma < 1,4$

b) Comme indiqué dans l'énoncé, la molécule d'eau a une forme en V :



Il est bien évident que la molécule peut tourner autour de 3 axes indépendants :

- axe perpendiculaire au plan de la molécule
- deux axes passant par la liaison (OH) par exemple

et que chaque rotation a un moment d'inertie non négligeable (contrairement à la molécule de CO_2 , dont l'axe le long des liaisons est très faible, car la molécule est linéaire : $\text{O}=\text{C}=\text{O}$).

Avec les trois degrés de translation et les trois degrés de rotation, on a alors :

$$f = 3 + 3 = 6 \Rightarrow \gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

c) Aucq $\gamma = \frac{4}{3}$ et $M = 3$:

$$(T_0 = 273,16 \text{ K}, p_0 = 612 \text{ Pa})$$

$$T = T_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} = 109,3 \text{ K}$$

$$P = \frac{P_0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = 15,7 \text{ Pa}$$

$$r = \frac{8,314 \text{ J/K.mol}}{0,018 \text{ kg/mol}} = 461,9 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$$

\nwarrow eau

$$\rho = \frac{P}{r \cdot T} = 3,1 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$$

$$v = M \cdot a = M \cdot \sqrt{\gamma r T} = 778,3 \text{ m/s}$$

\uparrow
vitesse du son

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 4,8$$

d) Comme la sortie est supersonique, il y a donc blockage sonique : le débit massique est donc forcément le même pour les deux cas (les conditions de réservoir sont les mêmes)

Il y a plusieurs manières d'évaluer le débit.

En voici une :

$$\dot{m} = \rho \cdot v \cdot A = \rho \cdot v \cdot \frac{\pi D_{vent}^2}{4} = 0,19 \text{ kg/s}$$

$D_{vent} = 1 \text{ m}$

e) En sortie de détente, la vitesse sera finie

$$(v = \sqrt{2c_p T_0} - \text{voir question f})$$

et la vitesse du son nulle ($= \sqrt{\gamma r T}$ avec $T=0$)
donc M sera infini.

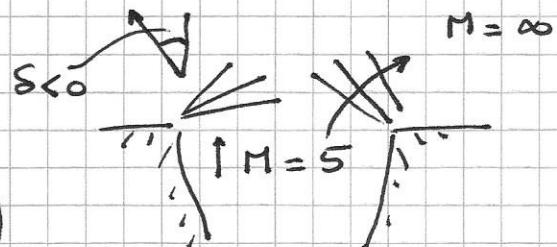
$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2-1)} - \arctan \sqrt{M^2-1}$$

Avec $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \arctan \xi = 90^\circ (\text{ou } \frac{\pi}{2} \text{ rad})$

$$\rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} v(M) = 90^\circ \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

L'angle de sortie :

$$\delta = v(M=5) - v(M=\infty)$$



$$v(M=5) = 84,59^\circ$$

$$v(M=\infty) = 148,12^\circ$$

$$\rightarrow \delta = -63,53^\circ$$

f) A partir de : $c_p T + \frac{1}{2} v^2 = c_p T_0$

et pour $T=0$ dans le milieu ambiant

$$v_{\max} = \sqrt{2c_p T_0} = 1'004,7 \text{ m/s}$$

$$\downarrow$$

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot r$$

(g)

A partir de :

$$C_p T + \frac{1}{2} v^2 - g \frac{r_0^2}{r} = C_p T_0 + \frac{1}{2} v_0^2 - g \cdot r_0$$

(i) $T = T_0 = \text{const}$

$$r \rightarrow \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v = 0$$

$$\rightarrow 0 = \frac{1}{2} v_0^2 - g r_0 \rightarrow v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot r_0}$$

(ii) $v_0 = 0$

$$r \rightarrow \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v = 0$$

$$T = 0$$

$$\rightarrow 0 = C_p T_0 - g r_0 \rightarrow T_0 = \frac{g}{C_p} \cdot r_0$$

La température du réservoir T_0 est indicative de l'énergie cinétique des molécules d'eau dans le réservoir.

Lors de la détente, cette énergie cinétique moléculaire (+ température) est

(2) Condensation supersonique

(a) Pour $T = 100^\circ\text{C} \sim 373\text{ K} \rightarrow \ln T = 5,92$

$$p_s = 101'325 \text{ Pa} \rightarrow \ln p_s = 11,53$$

Avec $L = 2'264'760 \text{ J/kg}$

$$r = 461,4 \text{ J/kg.K}$$

bien sur la courbe de saturation sur le diagramme

$$\rightarrow -\frac{L}{r \cdot T} + 24,68 = 11,52 \quad \checkmark$$

(b) A partir de la relation isentrope

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rightarrow \ln P = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \ln T + \ln \frac{P_0}{T_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

↑
pente

(c) A partir de $\ln p_s = -\frac{L}{rT} + 24,68$

$$\rightarrow \frac{d p_s}{p_s} = + \frac{L}{r T^2} dT$$

$$d(\ln p_s) = + \frac{L}{r T} d(\ln T)$$

$$\frac{d(\ln p_s)}{d(\ln T)} = \frac{L}{r T} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{pente de} \\ \text{la courbe de} \\ \text{saturation} \end{array}$$

Le rapport des pentes est alors :

$$\frac{L/rT}{\gamma/\gamma-1} = \frac{L}{C_p \cdot T} \quad \text{avec } C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot r$$

$$\text{Pour } 273,16\text{ K} < T < 647\text{ K} \rightarrow 1,75 < \frac{L}{C_p T} < 4,15$$

→ donc les isentropes intersectent toujours la courbe de saturation.

d) Suite au résultat de c), toute détente (baisse de pression et de température) le long d'une isentrope mènera à une condensation (intersection de l'isentrope avec la courbe de saturation).

e) Pour $\gamma = 1,3$ et $\frac{A}{A^*} = 3,6811$, on peut utiliser directement les tables isentropes :

$$\frac{T}{T_0} = 0,4777 \rightarrow T = 334,39 \text{ K}$$

$$\frac{P}{P_0} = 0,0407 \rightarrow P = 22,033 \text{ Pa}$$

(on a choisi les valeurs correspondant à un nombre de Mach $M = 2,70$ comme l'énoncé indique qu'il y a blocage sonique)

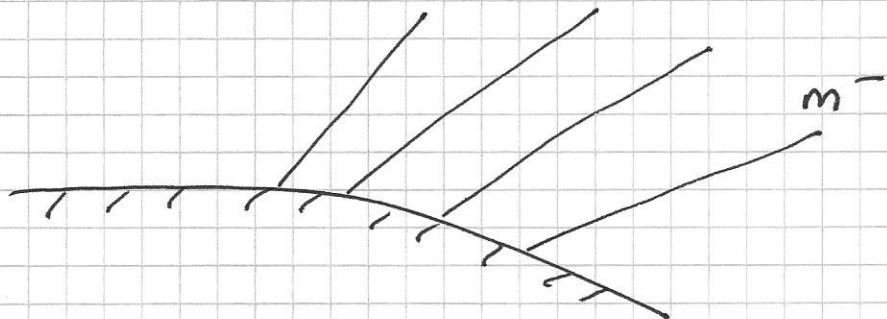
$$\rightarrow \ln p \approx 10,0$$

$$-\frac{L}{r \cdot T} + 24,68 \approx 10,0$$

} il y a donc bien saturation

f) On a montré en cours que pour une région homentrope subissant une détente, la région est obligatoirement simple, c'est à dire avec des caractéristiques de Riemann m-rectilignes. Ces caractéristiques ne sont rien d'autre que des ondes de Mach le long desquelles le nombre de Mach est constant.

Ainsi, si une condensation se produit dans une détente, elle se fera partout au même nombre de Mach, c'est à dire le long d'une de ces caractéristiques (ou ondes de Mach) rectilignes.



Le front de condensation est donc obligatoirement plan (comme sur la photo).

g) En b), nous avons vu :

$$\ln p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \ln T + \ln \frac{p_0}{T_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

les isentropes diffèrent donc par ce terme

Pour la même température totale T_0 , les isentropes avec une pression totale p_0 plus élevée sont donc positionnées plus haut sur le diagramme.

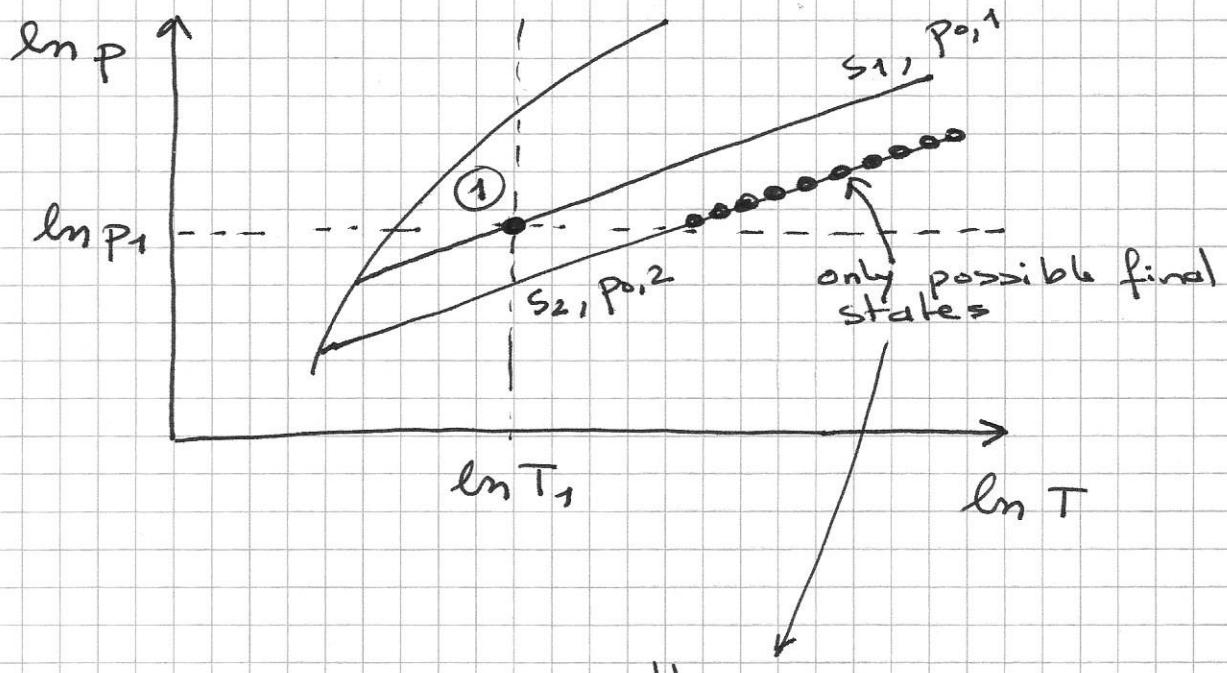
h)

En traversant un choc, un écoulement verra sa pression totale baisser de $p_{0,1}$ à $p_{0,2}$.

Ainsi, en traversant un choc, on passe obligatoirement d'une isentrope haute sur le diagramme vers une isentrope basse sur le diagramme.

De plus, on sait qu'après avoir traversé le choc, la pression et la température augmentent :

$$P_2 > P_1, \quad T_2 > T_1$$



Ainsi, l'état final ne peut jamais intersecter la courbe de saturation !

i) Question bonus

La relation de Rankine-Hugoniot représente le lien entre les états en amont et en aval du choc.

On peut partir de la relation générale :

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (P_2 - P_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

Avec $h = C_p T + \text{const}$ et $\rho = \frac{P}{rT}$, alors :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot r$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot r (T_2 - T_1) = \frac{1}{2} (P_2 - P_1) r \left(\frac{T_1}{P_1} + \frac{T_2}{P_2} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \left(1 + \frac{T_2/T_1}{P_2/P_1} \right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^2 + \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \left[\frac{-2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) - 1 + \frac{T_2}{T_1} \right] - \frac{T_2}{T_1} = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^2 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) - \frac{T_2}{T_1} = 0$$

$$\rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)^2 + 4 \frac{T_2}{T_1}} \right]$$

seule la solution avec \oplus
afin d'avoir $P_2 > 0$

Cette relation de Rankine-Hugoniot $\frac{P_2}{P_1} = f^n \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$

pourrait être tracée sur le diagramme afin de révéler le lieu des états finaux possibles et autorisés.

③ Double rampe de compression

a) * Choc A

Pour $M_\infty = 2,8$ et $\delta_1 = 15^\circ$

sur le diagramme des ondes de choc oblique, on trouve

$$\Theta_1 \approx 34^\circ$$

$$\rightarrow M_{n,\infty} = M_\infty \cdot \sin \Theta_1 \approx 1,5657$$

A partir des tables ou de la formule :

$$M_{n,1}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{n,\infty}^2}{\gamma M_{n,\infty}^2 - \frac{\gamma - 1}{2}} \Rightarrow M_{n,1} \approx 0,6790$$

$$M_1 = \frac{M_{n,1}}{\sin(\Theta_1 - \delta_1)} \approx 2,086$$

$$\frac{P_2}{P_\infty} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \Theta_1 - 1) \approx 2,6934$$

* Choc B

$$M_1 \approx 2,086 \text{ et } \delta_2 = 17^\circ \rightarrow \Theta_2 \approx 46^\circ$$

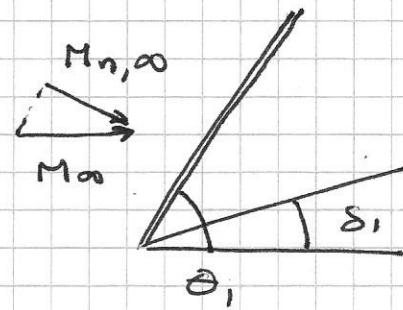
$$\rightarrow M_{n,1} = M_1 \cdot \sin \Theta_2 \approx 1,500$$

↑
graphique

$$M_{n,2}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{n,1}^2}{\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma - 1}{2}} \rightarrow M_{n,2} \approx 0,701$$

$$M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\Theta_2 - \delta_2)} \approx 1,446$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \Theta_2 - 1) \approx 2,458$$



$$\rightarrow \frac{P_2}{P_\infty} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_\infty} \approx 6,62$$

* Choc C

Pour $M_\infty = 2,8$ et $\delta_3 = 15^\circ + 17^\circ = 32^\circ$

$$\rightarrow \theta_3 \approx 60^\circ$$

↑
graphique

$$M'_{n,\infty} = M_\infty \cdot \sin \theta_3 \approx 2,4249$$

$$M_{n,3}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{n,\infty}^{1/2}}{\gamma M_{n,\infty}^{1/2} - \frac{\gamma - 1}{2}} \rightarrow M_{n,3} \approx 0,5204$$

$$M_3 = \frac{M_{n,3}}{\sin(\theta_3 - \delta_3)} \approx 1,109$$

$$\frac{P_3}{P_\infty} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_\infty^2 \sin^2 \theta_3 - 1) \approx 6,69$$

On voit ainsi que, dans le cadre des approximations dans la lecture des graphes,

$$\frac{P_3}{P_\infty} \approx \frac{P_2}{P_\infty}$$

b)

